Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

RM

2022-2023

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1 Calcul direct d'intégrale

1.1 Par primitive

Théorème 1 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'application $F : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a $F'(x) = f(x)$ pour $x \in [a,b]$.

Corollaire 2 : Toute application continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ admet au moins une primitive F, et pour toute primitive F de f, on a $\int_a^b f(x)dx = [F]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple 3 : Ceci est la première méthode pour calculer une intégrale. On cherche une primitive.
On a par exemple • $\int_0^{\pi/2} \cos(x)dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$.
• Pour un polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, on a $\int_a^b P(x)dx = \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^k dx = \sum_{k=0}^n a_k \left[\frac{b^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1}\right]$.
• $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

Application 4 : Pour calculer une fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$, on décompose F en éléments simples sur $\mathbb{R}$. On est donc ramené à calculer les primitives de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)^h} (h \in \mathbb{N}^*)$ et $\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}dx (c^2 - 4d < 0, h \in \mathbb{N}^*)$ par linéarité de l'intégrale.
On obtient en primitive :

• $\int \frac{dx}{(x-a)^h} = \begin{cases} \frac{1}{(1-h)(x-a)^{h-1}} + k \text{ si } h \neq 1 \\ \log|x-a| + k \text{ si } h = 1 \end{cases}$.

• On écrit $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^h} = \frac{2\alpha(x-p)}{[(x-p)^2+q^2]^h} + \frac{\beta}{[(x-p)^2+q^2]^h}$. On obtient facilement la première primitive, et la deuxième par un changement de variable puis des ipp.

Exemple 5 : On obtient par cette méthode que

$$\int \frac{1-x}{(x^2+x+2)^2}dx = \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + k.$$

Exemple 6 : Pour intégrer $x \mapsto \cos^4 x$, on peut linéariser et on obtient $\cos^4 x = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}$. On primitive alors facilement.

1.2 Par intégration par partie

Théorème (Intégration par partie) 7 : Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{C}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u.v]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Exemple 8 : Avec cette technique, on peut montrer que l'intégrale de dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ est convergente. Attention cependant, la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple 9 : Si on pose pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ les intégrales de Wallis, alors on obtient avec une intégration par partie que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour $n \geq 2$. En calculant I_0 et I_1, on en déduit I_{2p} et I_{2p+1}.

Exemple 10 : Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ pour $x \in \mathbb{R}_*^+$. Pour $x > 0$, on trouve par intégration par partie que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. On en déduit que $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Par changement de variable

Théorème (Changement de variable) 11 : Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux telle que $\varphi([a,b]) \subset I$. Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$$

Remarque 12 : En conjuguant ce théorème avec la relation de Chasles, on obtient : • Soit $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$. Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.
• Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux et T-périodique. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

Application (Règle de Bioche) 13 : On veut calculer une primitive d'une fonction rationnelle en $\sin x, \cos x$. Notons la $R(\sin x, \cos x)$. Alors
• Si $R(\sin x, \cos x)dx$ reste inchangé en changeant x en $\pi - x$, on pose $t = \sin x$.
• Si $R(\sin x, \cos x)dx$ reste inchangé en changeant x en $-x$, on pose $t = \cos x$.
• Si $R(\sin x, \cos x)dx$ reste inchangé en changeant x en $\pi + x$, on pose $t = \tan x$.

Exemple 14 : On veut calculer $\int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$. On remarque que l'expression dans l'intégrale reste inchangé en changeant x en $-x$, on pose donc $t = \cos x$. On obtient alors $\int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \int_{-1}^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}dt = \int_{-1}^1 \frac{2}{1+t^2} - 1dt = \pi - 2$.

Théorème (Changement de variable multidimensionnel) 15 : Soient U et V deux ouvert de $\mathbb{R}^n$ et ϕ un difféomorphisme de U sur $\phi(U) = V$.
Si $f : V \to \mathbb{R}^+$ est mesurable alors

$$\int_V f(v)dv = \int_U (f \circ \phi)(u)|J_\phi(u)|du.$$

Exemple 16 : Pour une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}^2$, on a comme changement de variable dit coordonnées polaires que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta.$$

Ceci nous permet de retrouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

2 Calcul indirect d'intégrale

2.1 Par Fubini

On prends $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espace mesurés avec $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ et $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ avec μ_1 et μ_2 σ-finies.

Théorème (de Fubini-Tonelli) 17 : Soit $f : E_1 \times E_2 \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors :

$i)$ Les applications $y \mapsto f(x,y)$ $\forall x \in E_1$ et $x \mapsto f(x,y)$ $\forall y \in E_2$ sont mesurables. Les applications $x \in E_1 \mapsto \int_{E_2} f(x,y)d\mu_2(y)$ et $y \in E_2 \mapsto \int_{E_1} f(x,y)d\mu_1(x)$ sont mesurables.

$ii)$ L'intégrale de f par rapport à la mesure produit μ est donnée par

$$\begin{aligned}\int_{E_1 \otimes E_2} f(x,y)d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y) &= \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x,y)d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x,y)d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)\end{aligned}$$

Théorème (de Fubini) 18 : Soit $f : E_1 \times E_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable et tel que f est μ-intégrable. Alors :

$i)$ Pour presque tout $x \in E_1$, l'application $y \mapsto f(x,y)$ est μ_2-intégrable. Pour presque tout $y \in E_2$, l'application $x \mapsto f(,x,y)$ est μ_1-intégrable.

$ii)$ Les applications $y \mapsto \int_{E_1} f(x,y)d\mu_1(x)$ et $x \mapsto \int_{E_2} f(x,y)d\mu_2(y)$ sont bien définis presque partout et intégrables respectivement sur E_2 et E_1.

$iii)$ L'intégrale de f par rapport à μ est donnée par

$$\begin{aligned}\int_{E_1 \times E_2} f(x,y)d(\mu)(x,y) &= \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x,y)d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x,y)d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y).\end{aligned}$$

Remarque 19 : La σ-finitude est importante. De plus, on peut utiliser le théorème de Fubini-Tonelli pour avoir ceci : si l'une des trois intégrales suivantes

$$I_1 = \int_{E_1 \times E_2} |f(x,y)|d(\mu)(x,y) \quad I_2 = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |f(x,y)|d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x)$$

$$I_3 = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} |f(x,y)|d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)$$

est finie alors il en est de même pour les deux autres. La fonction f est alors μ intégrable et on a le point $iii)$ du théorème de Fubini.
On utilise ceci pour prouver par exemple l'interversion entre une intégrale et une série convergente.

Théorème 20 : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions μ-intégrables sur X telles que la suite numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_X |f_n|d\mu$ converge. Alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge absolument pour μ-presque tout $x \in X$. De plus, la fonction f (définie $\mu - p.p$) par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est μ-intégrable sur X et on a

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

2.2 Paramétrisation et interversion limite-intégrale

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Théorème (de convergence dominée) 21 : Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions complexes mesurables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ telle que

$i)$ Pour μ-presque tout $x \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

$ii)$ il existe une fonction positive g, μ-intégrable sur X et telle que $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \mu - p.p.$

Alors la fonction f (définie $\mu - p.p$) est μ-intégrable et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|d\mu = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Application 22 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On a alors que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)^n dt = 0$ grâce au théorème de convergence dominée.

Théorème (Dérivabilité sous le signe intégrale) 23 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times X \to \mathbb{C}$. On suppose que

i) Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est mesurable et il existe $x_0 \in I$ tel que $t \mapsto f(x_0,t)$ est μ-intégrable sur X.

ii) Pour tout $t \in X$, $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur I.

iii) Pour tout compact K inclus dans I, il existe une fonction g_K μ-intégrable telle que pour tout $x \in K$, on a, pour μ presque tout $t \in E$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g_K(t)$.

Alors la fonction $x \mapsto F(x) = \int_X f(x,t)d\mu(t)$ est dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$,

$$F'(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)d\mu(t).$$

Développement 24 : En étudiant la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}dt$, on trouve que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$

Dev 1

2.3 Par l'analyse complexe

Théorème (Holomorphie sous l'intégrale) 25 : Soit V un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : V \times X \to \mathbb{C}, (z,x) \mapsto f(z,x)$. On suppose que

- $\forall z \in V$, la fonction $x \mapsto f(z,x)$ est mesurable et $\forall x \in X$, la fonction $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe sur V.
- Pour tout compact K inclus dans V, il existe une fonction intégrable g_K telle que pour tout $z \in K$, on a pour tout $x \in X$, $|f(z,x)| \leq g_K(x)$. Alors la fonction $z \mapsto F(z) = \int_X f(z,x)d\mu(x)$ est holomorphe sur V.

Définition 26 : Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet et $U = \mathbb{C} \setminus \text{im}\gamma$. Pour $z \in u$, on pose $\text{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$. Alors l'application $z \mapsto \text{ind}_\gamma(z)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et intuitivement, $\text{ind}_\gamma(z)$ est le "nombre de tour" décrit par $\gamma(t)$ autour de z quand t décrit $[a,b]$.

Définition 27 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{M}(U)$, et $a \in U$ un pôle d'ordre m de f. La partie principale de f en a est $P(z) = \sum_{k=1}^m \alpha_{-k}(z-a)^{-k}$. On dit que α_{-1} est le résidu de f en a, et on note $\alpha_{-1} = Res(f,a)$.

Remarque 28 : Pour calculer des résidus dans la pratique, on pose $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ (f,g holomorphes) avec $h(z) = (z-a)^m h_1(z)$, avec $h_1(a) \neq 0$ et a un pôle de f d'ordre m. Si $m = 1$, alors $Res(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \frac{g(a)}{h_1(a)}$ et comme $h'(a) = h_1(a)$, on obtient $Res(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$.
Si $m > 1$, on a $Res(f,a) = \lim_{z\to a} \frac{1}{(m-1)!}[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}$.

Théorème (des résidus) 29 : Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $a_1, ..., a_n$ des points deux à deux distincts de U et $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a_1, ..., a_n\})$. On suppose que chaque a_k est un pôle de f. Si γ est un chemin fermé dans U dont l'image ne contient aucun des a_k, on a :

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{ind}_\gamma(a_k)Res(f,a_k).$$

Remarque/exemple 30 : C'est un outil extrêmement puissant pour calculer des intégrales.
Par exemple, on trouve grâce aux théorème des résidus que pour $0 < a < 1$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$.

Développement 31 : La fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ est

$$exp(i\mu t)exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

La fonction caractéristique de la loi de Cauchy $\mathcal{C}(a,b)$ est

$$e^{iat}e^{-b|t|}$$

Dev 2

3 Calcul par des méthodes annexes

3.1 Par les séries de Fourrier

Définition 32 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On appelle coefficients de Fourrier exponentielle et trigonométrique de f les nombres complexes définis par $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$,$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n(f) = 1/\pi \int_0^{2\pi} f(t)\cos ntdt$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = A/\pi \int_0^{2\pi} f(t)\sin ntdt$.
On appelle série de Fourrier associé à f la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ ou $a_0(f)/2 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx)$.

Remarque 33 : On va montrer après des cas de convergence.

Proposition 34 : En posant $b_0(f) = 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$.

Proposition 35 : Soit f une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, 2\pi]$. Alors f' est continue par morceaux et 2π-périodique, et on a pour tout $n \in \mathbb{Z}, c_n(f') = inc_n(f)$.

Remarque 36 : Si f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $[0, 2\pi]$ et $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur ce segment, on obtient par itération que pour tout $n \in \mathbb{Z}, c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$.

Proposition 37 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors :
Si f est paire, alors $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos ntdt$.
si f est impaire, alors $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin ntdt$.

Théorème (Égalité de Parseval) 38 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux.
Alors les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2, \sum |a_n(f)|^2, \sum |b_n(f)|^2$ convergent et on a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Théorème (Riemann-Lebesgue) 39 : Soit $f : I = [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{ixt}dt = 0$.

Théorème (Jordan-Dirichlet) 40 : • Si f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourrier de f converge en ce point x vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$. En particulier, si f est continue en x, la série de Fourrier de f en x converge vers $f(x)$.
• Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourrier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Application 41 : Ceci nous permet de calculer par exemple les $\zeta(2k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ avec $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$.

Exemple/Application 42 : En étudiant les coefficients de Fourrier de $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$, on en déduit que $\zeta(2) = \pi^2/6, \zeta(4) = \pi^4/90, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \pi^2/8$.

Application 43 : Nous avons les résultats suivants pour les intégrales de Fresnel : $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3.2 Méthode de Monte-carlo

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Théorème (Loi forte des grands nombres) 44 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées telle que $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$. Alors la suite $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[X_1]$.

Application (Méthode de Monte-Carlo) 45 : Soit $g : [0, 1]^d \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable telle que g^2 est intégrable. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0, 1]^d$.
Alors la suite $\left(1/n \sum_{i=1}^n g(X_i)\right)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement (et dans L^1) vers $I = \int_{[0,1]^d} g(x)dx$.

Remarque 46 : Cette méthode permet donc de calculer des intégrales, ou encore des approximations de certains nombre en les reliant à un aire.

Application 47 : On peut faire une approximation de π avec cette méthode. On tire uniformément x et y dans $[0, 1]$ et on fait la proportion notée m du nombre de point dans le quart de cercle de rayon 1 et le carré de côté de 1. On a alors que m est une approximation de $\frac{\pi}{4}$ et donc $4m$ est l'approximation cherché.

Références :

1. Analyse Gourdon
2. Mesures, intégration, convolution ... El Haj Laamri
3. Analyse complexe l3 Tauvel
4. isenman (rip)
5. probabilité barbe